МОДЕЛЮВАННЯ ЖИВУЧОСТІ МЕРЕЖЕВИХ СТРУКТУР

О.Г. Додонов[0000-0001-7569-9360], Д.В. Ланде[0000-0003-3945-1178]
Інститут проблем реєстрації інформації НАН України, Київ, Україна

dodonov@ipri.kiev.ua, dwlande@gmail.com

У роботі моделюється і досліджується структурна живучість систем. Вводиться пороговий критерій живучості системи, що залежіть від розміру максимальної зв'язаної компоненти мережевої моделі після деструктивного впливу на неї. Цей показник складніше показника канонічної структурної живучості, яка враховує тільки порушення зв'язності мережі. Досліджується стан мереж з різною топологією при видаленні їх елементів (зв'язків). Очевидно, що введений показник залежить від топології мережі і її розмірів, разом з тим, добре наближається кубічними поліномами.

Ключові слова: Моделювання живучості, Модель мережі, Показник живучості.

Введення

До найважливіших фундаментальних властивостей систем відноситься живучість, під якою розуміють її здатність адаптуватися до нових умов функціонування, протистояння небажаним впливам при реалізації основної цільової функції. Ця робота присвячена моделюванню структурної живучості систем. Одне із завдань цієї роботи - дати чітку кількісну оцінку живучості.

Структурна живучість розглядається як властивість системи зберігати свою функціональність при пасивній протидії пошкодженням окремих елементів. Критерій структурної надійності - число елементів, що відмовили, при тому, що не порушуються працездатність системи [1].

1 Загальноприйняті моделі

Схема функціонування складної системи може бути задана за допомогою мережі, сукупності вузлів і зв'язків, яка визначає фізичну структуру цієї системи.

У загальноприйнятих моделях [2] вважається, що видалення всіх зв'язків, інцидентних деякому вузлу, ізолює його, перериваючи всі шляхи до інших вузлів – мережа стає незв'язною, живучість мережі – рівною нулю.

У цій роботі приймається інший критерій, пороговий, а саме, розглядається розмір найбільшою зв'язковий компоненти мережі. Зв’язність всієї мережі може бути порушена, але система залишається функціонально здатною, якщо відповідна максимальна зв'язкова компонента за обсягом (кількістю вузлів) незгірш від деякого заданого заздалегідь порога.

У роботах [3], [4] пропонується канонічне визначення коефіцієнта живучості, при якому ніяке руйнування зв'язків (ребер графа) не приводить до втрати зв'язності.

Канонічна живучість мережі *R(G, p)* визначається як ймовірність того, що граф мережі *G* залишиться зв'язним після того, як кожний зв'язок (ребро) буде видалений з однаковою ймовірністю *p*. *R(G, p)* можна розрахувати за допомогою перерахування остовів *G*. На практиці канонічна живучість тісно пов'язана з многочленом Татте-Уїтні (Tutte-Whitney) [5], який є інваріантом графа, що описує його комбінаторні властивості.

При цьому точний розрахунок канонічної живучості системи являє собою *NP*-складну задачу, витрати на вирішення якої зростають експоненційно з ростом числа вузлів і зв'язків, так як для розрахунку живучості полінома графа, що складається з n ребер, необхідно пройтися по всіх остовних підграфів графа *G* [6]. Тому в багатьох роботах пропонуються альтернативні наближені підходи для оцінки живучості систем [7].

2 Метод, що пропонується

На відміну від традиційного підходу в даній роботі пропонується підхід, який базується на імітаційному моделюванні:

1. Модель системи – граф, що складається з вузлів і зв'язків (ненаправлених) $S = (V, E)$. Вузли – однорідні функціональні компоненти.
2. «Потужність» системи – кількість вузлів в найбільшій зв'язковий компоненті V_s .
3. Система знаходиться в стані «жива», функціонально здатна, якщо питома «потужність» системи не менше деякого порогу τ , тобто $|V_s|/|V_o| \geq \tau,$ де V_o – первинний розмір мережі.
4. На зв'язки мережі проводиться деструктивний вплив. Кожна зв'язок може бути видалена з ймовірністю p .

Для кожної конкретної системи можна визначити міру живучості системи при заданому порозі τ , тобто ймовірність видалення окремих елементів (зв'язків) $p*$, при якій система виходить із стану «жива», тобто $|V_s|/|V_o| < \tau$.

3 Еталонні мережі

Для моделювання як приклад досліджуються три артефактних мережі, а саме, мережі Барабаші-Альберт, Ердеша-Рен`ї та Уаттса-Строгатца. Ці мережі можуть розглядатися як прототипи багатьох реальних мереж.

3.1 Мережа Барабаші-Альберт: модель «переважного приєднання»

Більшості артефактних мереж притаманний степеневий закон розподілу. Такий розподіл пояснюється ефектом переважного приєднання (preferential attachment). До таких мереж відносяться мережі Барабаш-Альберта

(Barabási, Albert). Для побудови цих мереж використовується спеціальна процедура, яка полягає в тому, що до початку малій кількості вузлів поступово додаються нові вузли, зв'язки від яких з більшою вірогідністю приєднуються до тих вузлів, у яких зв'язків більше [8]. Модель переважного приєднання Барабаші-Альберт реалізована, зокрема, на мові R в пакеті igraph [9].

3.2 Мережа Ердеша–Рен`ї

Мережу Ердеша–Рен`ї (P. Erdős, A. Rnyi) [10] можна побудувати, розподіливши випадковим чином M зв'язків між N вузлами. Її іноді викликають моделлю пуассонівського випадкового графа (Poisson random graph model) через пуассонівського розподілу ступенів при $N \to \infty$, або іноді просто моделлю випадкового графа (random graph model). Еквівалентна модель, в якій значення кількості ребер M замінюється у відповідності із ймовірністю p появи нового ребра в графі. Модель випадкового графа реалізована на мові R в пакеті igraph.

3.3 Мережа «малого світу» (Small World)

Д. Уаттс і С. Строгатц (D.J.Watts, S. Strogatz) виявили феномен, характерний для багатьох реальних мереж, названий ефектом малих світів (Small Worlds) [11]. Ними була запропонована процедура побудови наочної моделі мережі, якій притаманний цей феномен. Ця модель являє собою одномірну регулярну решітку, що складається з N вузлів, де кожен вузол з'єднаний тільки зі своїми 4 найближчими сусідами і накладені періодичні граничні умови – решітка згорнута в кільце. Потім виконується така процедура: з імовірністю p відбувається перемикання (rewiring) невеликої кількості зв'язків (ребер), в ході якого вони видаляються і замінюються іншими зв'язками, що з'єднують два випадково обраних вузла. У початковому стану цієї мережі – вона регулярна – кожен вузол якої з'єднаний з чотирма сусідніми. Потім у цій мережі деякі «ближні» зв'язку випадковим чином замінені «далекими» – саме в цьому стані виникає феномен «малих світів» (при $p \in (0.01,\ 0.1)$). При подальшому збільшенні p утворюється мережа, яка за властивостями близька до випадкової мережі Ердеша-Рен`ї.

4 Модель

Було проведено імітаційне моделювання процесу руйнування трьох мереж, а саме, Барабаші-Альберт, Ердеша-Рен`ї, Уаттса-Строгатца. Моделювання проводилося на мові програмування R з використанням бібліотеки igraph. Результати моделювання наведені у Таблиці 1 і на Рис. 1-3.

Якщо задати поріг руйнування, наприклад, наступним чином, мережа функціональна, якщо розмір найбільшої зв'язної компоненти V_s становить 0.2 від початкового розміру мережі V_0, тобто: $|V_s| / |V_o| \geq \tau,\ \ \tau = 0.2$ то, відповідно, отримуємо значення порогової ймовірності $p*$ для мереж:

Ердеша-Рен`ї: ≈0.8
Уаттса-Строгатца: ≈0.7
Барабаші-Альберт: ≈0.5.

Таблиця 1. Результати моделювання.

Назва моделі	**Параметри**	**Наближена формула**	**Точність R^2**
Ердеша-Рен`ї	N=200, M=500	$-3*10^{-8}x^3 + 10^{-5}x^2 - 0{,}0011x + 1{,}0091$	0,99
Уаттса-Строгатца	N=200	$10^{-7}x^3 - 6*10^{-5}x^2 + 0{,}0061x + 0{,}8768$	0,98
Барабаші-Альберт	N=200	$-4*10^{-7}x^3 + 0{,}0001x^2 - 0{,}0187x + 1{,}0029$	0,97

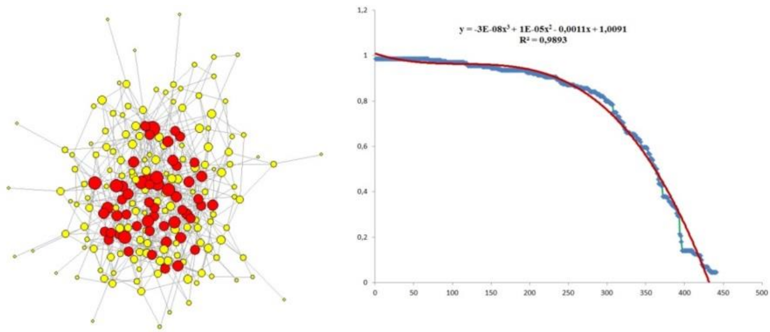

Рис. 1: Мережа Ердеша-Рен`ї та графік «потужності» мережі (вертикальна вісь) від кількості вилучених зв'язків (горизонтальна вісь).

Як видно, в кожному разі, криві з високою точністю апроксимуються кубічними многочленами, тобто для досить точного наближення досить трьох ступенів многочлена Татте-Уїтні. З огляду на топологію мереж і наведені раніше аналітичні оцінки, можна зробити висновок, що найбільша структурна живучість серед трьох розглянутих мереж властива випадкової мережі Ердеша-Рен`ї (в даному випадку ця мережа має найбільшу кількість ребер). На другому місці - мережа малого світу, ця мережа, в якій вузли мають середню ступінь 2 з розподілом, близьким до пуассонівського. І найгірші показники живучості у мережі Барабаші-Альберт.

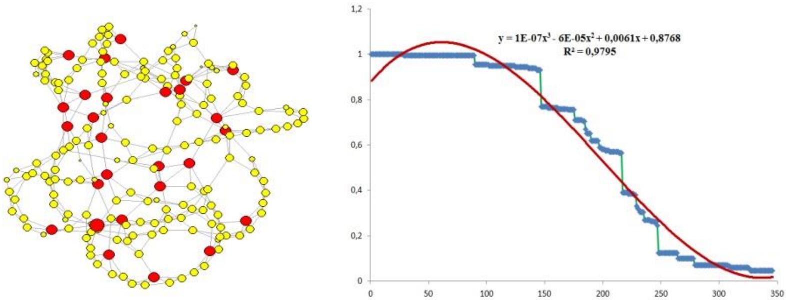

Рис. 2: Мережа Уаттса-Строгатца і графік «потужності» мережі (вертикальна вісь) від кількості вилучених зв'язків (горизонтальна вісь).

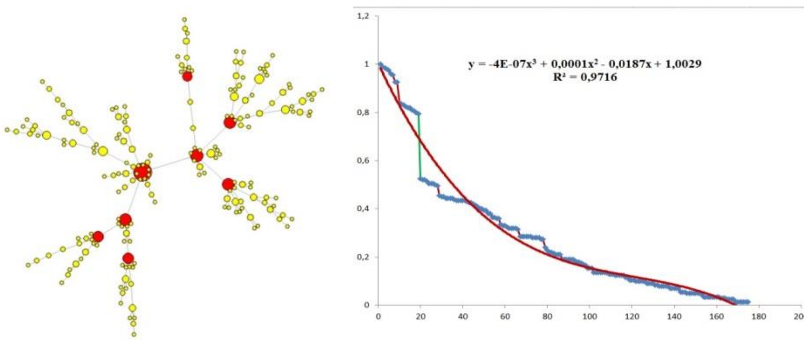

Рис. 3: Мережа Барабаші-Альберт і графік «потужності» мережі (вертикальна вісь) від кількості вилучених зв'язків (горизонтальна вісь).

Слід звернути увагу на те, що в останньому випадку, на відміну від інших, спостерігається «опукла вниз» функція живучості, це свідчить про те, що розглянута в цій роботі «потужність» різко знижується вже навіть при невеликих значеннях ймовірності деструктивних впливів.

Висновки

У цій роботі був введений новий показник структурної живучості мережевої структури, який ґрунтується на питомому розмірі максимальної компоненти зв'язності мережі при деструктивному впливі на неї.

Розвиток запропонованої моделі можливо шляхом урахування нерівнозначності вузлів мережевої моделі або зміни функції «потужності» мережевої структури. Також дана модель може розширюватися в напрямку вивчення мереж, в яких зв'язки «регенеруються», або можуть встановлюватися нові зв'язки.

Список літератури

1. Величко В.В., Попков Г.В., Попков В.К.: Модели и методы повышения живучести современных систем связи. Москва: Горячая линия–Телеком (2014).
2. Громов Ю.Ю., Драчев В.О., Набатов К.А., Иванова О.Г.: Синтез и анализ живучести сетевых систем : монография. Москва: «Издательство Машиностроение-1» (2007).
3. Oxley, J.G.: Matroid Theory. Oxford Science Publications (1992).
4. Sekine K., Imai H., Tani S.: Computing the Tutte Polynomial of a Graph of Moderate Size. In: 6th International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC'95). Lecture Notes in Computer Science. 1004. pp. 224–233 (1995).
5. Tutte, W.T.: A Contribution to the Theory of Chromatic Polyno-mials. Canadian Journal of Mathematics, 6. 80-91 (1954).
6. Филлипс Д., Гарсиа-Диас А.: Методы анализа сетей. Москва, Мир (1984).
7. Долгов А.А.: Исследование живучести сетевых информационных систем с использованием неросетевых моделей. Психолого-педагогический журнал Гаудеамус, 2(16), 285-287 (2010).
8. Albert-László Barabási, Réka Albert: Emergence of scaling in random networks. Science, 286, 5439. 509-512 (1999).
9. Люк Д.А.: Анализ сетей (графов) в среде R. Руководство пользователя. Москва: ДМК Пресс (2017).
10. Erdős, P.; Rényi, A.: On Random Graphs. I. Publicationes Mathematicae, 6. 290–297 (1959).
11. Watts D.J., Strogatz S.H.: Collective dynamics of “small-world” networks. Nature. 393. pp. 440-442 (1998).