

ЕФЕКТ СИМЕТРІЇ ПРИ ВІДНОВЛЕННІ ЗНАЧЕНЬ МЕРЕЖЕВИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВУЗЛІВ ПІСЛЯ ЗОВНІШНІХ ЗБУРЕНЬ

А.О. Снарський^{1,2}[0000-0002-4468-4542], Д.В. Ланде^{1,2}[0000-0003-3945-1178],
О.О. Дмитренко¹[0000-0001-8501-5313]

¹ Інститут проблем реєстрації інформації НАН України, Київ, Україна
² Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", Київ, Україна
asnarskii@gmail.com, dwlande@gmail.com, dmytrenko.o@gmail.com

В цій роботі досліджуються числові характеристики вузлів мережеских структур – показник часу релаксації мережі та індивідуальний показник часу релаксації вузла, які характеризують стійкість складної мережі та, відповідно, кожного вузла окремо до зовнішніх збуджень. Обчислення показників часу релаксації здійснюється за допомогою уповільнених ітераційних алгоритмів (HITS або PageRank, наприклад). Окрім вже відомих аналогій цих показників з часом релаксації Максвелла, що відіграє важливу роль у фізиці твердого тіла, у цій роботі також показано ефект симетрії при відновленні значень мережеских характеристик вузлів після зовнішніх збуджень. Апробацію показника часу релаксації та індивідуального показника часу релаксації було проведено на прикладі простої ненаправленої ієрархічної мережі.

Ключові слова: складна мережа, показник часу релаксації, індивідуальний показник релаксації, HITS, PageRank.

Вступ

Складні мережі відіграють важливу роль у природі. Такі мережі є поширеними та володіють нетривіальними топологічними властивостями [1], [2]. І саме ці властивості складних мереж істотно визначають їх функціональні можливості та є предметом їх дослідження.

Наукові роботи вчених П. Ердоша, М. Е. Дж. Ньюмана, А.-Л. Барабаші, С. Г. Строгаца, Дж. Клейнберга, та інших дослідників зробили значний внесок у розвиток теорії, що займається дослідженням характеристик складних мереж – теорії складних мереж (від англ. – Complex Networks).

Існують різні мережескі характеристики [3], зокрема такі найважливіші як ступінь вузла та показники, що відповідають алгоритмам HITS [4] та PageRank [5]. Проте незважаючи на вже існуючі характеристики складних мереж, важливе значення також має розробка та дослідження нових, зокрема таких, які б характеризували стійкість складної мережі до зовнішніх збуджень.

Показник часу релаксації

Під час дослідження складних мереж було помічено, що значення мережевих характеристик вузлів після того, як на них подіяли зовнішні збурення, в результаті перерахунку відновлюються до своїх початкових рівноважних значень за деякий індивідуальний для кожного вузла час. Порівнюючи показник часу релаксації із самою мережевою характеристикою, значення якої піддавалося збуренню, простежується нечітка залежність. Наприклад, у роботі [6] показано, що найбільші числові значення показника часу релаксації (характеризує повільне відновлення до початкових рівноважних значень) досягаються для середніх значень степеня вузла. Або ж навпаки, швидке відновлення числових значень визначеної мережевої характеристики вузлів після збурення цих числових значень характерне для вузлів, що мають, наприклад, низький або високий ступінь. Це означає, що показник часу релаксації є унікальною та неподібною до інших числовою характеристикою вузлів мережі.

Для вищеописаної нової характеристики простежується аналогія з часом релаксації Максвелла, який відіграє важливу роль у фізиці твердого тіла. Час релаксації Максвелла τ для електричного заряду, який “розсмоктується” у середовищі з питомою електричною провідністю σ та діелектричною проникністю ε є характерним часом переходу цього середовища в рівноважний стан, де зменшення щільності заряду ρ з часом t має вигляд

$\rho(t) \sim e^{-\frac{t}{\tau}}$, де $\tau = \varepsilon / \sigma$. У випадку дослідження складних мереж таким часом буде називатися кількість ітераційних кроків τ відповідного алгоритму, які потрібні, щоб з деякою наперед заданою точністю μ (зазвичай $\mu = 10^{-4}$) досягти початкових рівноважних числових значень певної характеристики після її збурення. Іншими словами, показником часу релаксації мережі після збурення певного m -го вузла $\tau^{(m)}$ називають кількість ітераційних кроків, які необхідні, щоб відновилось значення кожного вузла, або $\max_k (\tau_k^{(m)})$ ($k = 1, \dots, n$, де n – кількість вузлів мережі). А

кількість ітерацій $\tau^{(m)}$, які необхідні для відновлення саме того вузла, числове значення характеристики якого було збурене, називатиметься індивідуальним показником часу релаксації вузла. Тобто перший показник характеризує вузол в термінах стійкості всієї мережі до наданого йому зовнішнього збурення, останній – в термінах його індивідуальної стійкості до цього збурення.

Встановлено [6], що на відновлення після зовнішнього збурення числових значень мережевих характеристик вузлів, наприклад, таких як HITS або PageRank, впливає топологія мережі, а також попередньо задане наближення μ – так звана умова досягнення початкового рівноважного стану. Також на відновлення числових значень впливає вибір коефіцієнта

уповільнення алгоритмів β , який застосовувався у випадках швидкої збіжності [6].

$$p(i) \rightarrow p_1(i) \rightarrow p_2(i) \rightarrow \dots \rightarrow \text{equilibrium}(i), \quad (1)$$

$$\hat{A}p_1(i) = p_2, \quad \hat{A}p_n(i) = p_{n+1}(i), \quad (2)$$

де \hat{A} – оператор алгоритму HITS або PageRank, тобто

$$p_{n+1}(i) \leftarrow \beta p_{n+1}(i), \quad (3)$$

Ефект симетрії

Під час досліджень було помічено, що на час (кількість ітерацій відповідного ітеративного алгоритму), який потрібний на відновлення початкового рівноважного стану мережі і кожного вузла окремо, окрім умови збіжності алгоритму μ та коефіцієнта уповільнення ітеративного алгоритму β впливає також величина збурення, яка надається одному із вузлів мережі.

Так наприклад, для ненаправленої ієрархічної мережі, що представлена на Рис. 1, були проведені дослідження показника часу релаксації мережі та індивідуального показника часу релаксації вузла при різних числових значеннях збурення. У якості числових значень мережевих характеристик вузлів, яким надавалося певне числове збурення, були взяті значення отримані за допомогою алгоритму PageRank.

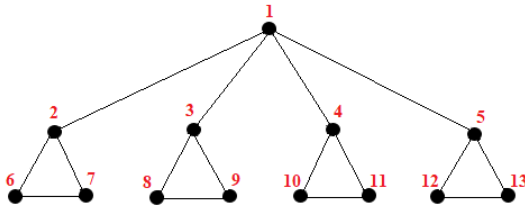


Рис. 5. Приклад простої ненаправленої ієрархічної мережі

Якщо узагальнити отримані результати для різних значень збурення у вигляді графіка (Рис. 2), то можна помітити симетрію відносно додатних та від’ємних значень збурення.

Висновки

В цій роботі було проведено аналогію між часом релаксації Максвелла та новими числовими характеристиками вузлів мережевих структур – показником часу релаксації мережі та індивідуальним показником часу релаксації вузла. Симетрія при відновленні значень мережевих характеристик вузлів відносно додатних та від’ємних значень зовнішніх збурень показує, що на показник часу релаксації мережі впливає лише абсолютна величина збурення, а не її знак.

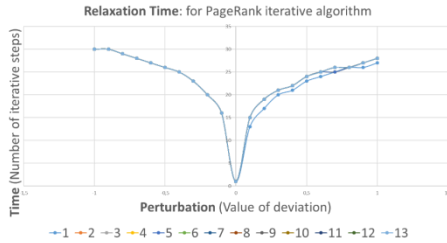


Рис. 6. Ефект симетрії для показника часу релаксації мережі (алгоритм PageRank)

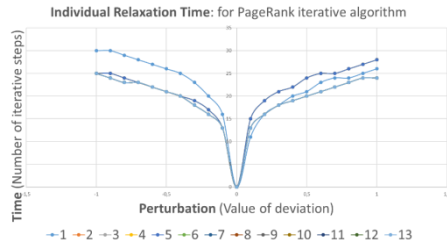


Рис. 7. Ефект симетрії для індивідуального показника часу релаксації вузла (алгоритм PageRank)

Отже, наявність ще однієї аналогії з часом релаксації Максвела підтверджує адекватність запропонованих характеристик вузлів та дає можливість використовувати їх для дослідження стійкості мережі та окремих вузлів до зовнішніх збурень.

Література

1. Newman, M. E. J.: The structure and function of complex networks. SIAM Review, vol. 45. pp. 167–256. (2003). DOI:10.1137/S003614450342480
2. Strogatz, S. H. (2001). Exploring complex networks. nature, 410(6825), 268–276.
3. Snarskii, A., Lande, D.: Modeling of complex networks: tutorial. K.: Engineering, (2015).
4. Kleinberg, J. M.: Authoritative sources in a hyperlinked environment. In Processing of ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, 46(5), pp. 604–632 (1998).
5. Brin, S., Page, L.: The anatomy of a large-scale hypertextual web search engine. Computer networks and ISDN systems, 30(1-7), 107-117 (1998). DOI:10.1016/S0169-7552(98)00110-X
6. Lande D., Snarskii A., Dmytrenko O., Subach I.: Relaxation time in complex network. ARES '20: Proceedings of the 15th International Conference on Availability, Reliability and Security August 2020. Article No.: 99 1-6. (2020). DOI: <https://doi.org/10.1145/3407023.3409231>